

Математика и искусство, 12 класс

**Тема: Парадоксы Эшера.**

(Парадокс реальности или реальность парадоксов)

*«О, сколько нам открытий чудных  
Готовит просвещения дух.  
И опыт, сын ошибок трудных,  
И гений - парадоксов друг...»  
А.С.Пушкин*

**Цели урока:**

**Познавательная (обучающая):**

- Будем учиться в обычном видеть необычное посредством математических понятий и произведений искусства, постараемся найти этому объяснение.
- Проведем занятие по наглядной геометрии: опыты с лентой Мёбиуса
- Увидим изученные в математике понятия, выход из плоскости в пространство в гравюрах Эшера, постараемся сделать философские выводы.
- Узнаем много новых фактов, познакомимся с новыми именами.
- Попробуем увидеть математику в искусстве и искусство в математике.

**Развивающая:**

- формирование умений анализировать,
- сравнивать,
- выдвигать гипотезы и предположения,
- переносить знания в новые ситуации,
- запоминать и извлекать информацию из памяти,
- тренировка памяти, способности концентрировать внимание

**Воспитательная:**

- воспитание личностных качеств, обеспечивающих успешность творческой деятельности (активности, увлеченности, целеустремленности, настойчивости, наблюдательности, интуиции, сообразительности)

**Необходимые на уроке материалы и оборудование:**

1. Медиапроектор с выходом в Интернет
2. Заготовки для занятий по наглядной геометрии (листы Мёбиуса), карандаши или ручки
3. Презентация РРТ 1 – к уроку,  
Презентация РРТ 1-2 «Картинная галерея»

**Ход урока:**

**Слайд 1. Тема урока «Парадоксы Эшера»**

**1.Организационный момент.**

**Учитель математики (УМ):**

У нас с вами сегодня не совсем, я бы даже сказала, совсем необычный урок. Судите сами: в его основе сразу два, далеко не родственных предмета – математика и искусство, вести его будут два учителя – учитель математики и учитель искусства, и говорить мы с вами будем тоже на двух языках, один из которых – это язык математической логики, а второй – язык художественных образов.

### Учитель искусства (УИ):

И даже тема нашего урока содержит в себе тоже два коротких, быть может, пока не очень понятных, но весьма емких слова.

### **Слайд 2. Эпиграф**

Учитель искусства УИ: (читает эпиграф)

Как человек творческий, Александр Сергеевич Пушкин дал очень поэтическое определение парадокса, указав на то, что гениальность и парадокс имеют схожую природу. А теперь я хочу обратиться ко всем присутствующим: как бы вы могли объяснить значение этого слова? (слушаем возможные варианты). Подведем итоги. Слово «парадокс» пришло к нам из Древней Греции и переводится оно как «неожиданный, странный». Исходя из этого, примем за аксиому следующее его определение: «Парадокс – это ситуация, которая может существовать в реальности, но не имеет при этом логического объяснения». Другими словами, парадокс – это когда наша логика вступает в конфликт с нашим зрением: глаза видят то, что разум объяснить не в силах.

### **Слайд 3. Парадокс – это...**

**Парадокс** (от греческого неожиданный, странный) – ситуация, которая может существовать в реальности, но не имеет логического объяснения.

## **II. Парадоксы реальности. Практическая работа.**

**УМ:** Человечество часто заблуждалось. Так, множеству математиков казалось очевидным, что любая поверхность в трехмерном пространстве обязательно должна иметь две стороны.

Предлагаю вам заняться наглядной геометрией.

- Перед вами полоска бумаги. Сколько поверхностей она имеет? ..... В этом мы можем убедиться, нарисовав на одной из сторон галочку или точку.
- Возьмите в руки склеенную ленту. Рассмотрите её. Как вы думаете, Сколько поверхностей имеет лента?  
Давай возьмем в руки карандаш и проведем линию посередине. Убеждаемся в том, что это односторонняя поверхность.

### **Слайд 4. Виды и практическое применение ленты Мёбиуса.**

Этот парадоксальный математический объект, названный позже лентой Мёбиуса, открыл миру в 1858 году немецкий математик Карл Август Мёбиус.

### **Слайд 5.**



**Карл Август Мёбус (1825-1908), родился в Айленбурге (Германия)  
Учёный-эколог**

**УИ:**

**Слайд 6.** Появляется изображение гравюры Эшера «Красные муравьи».

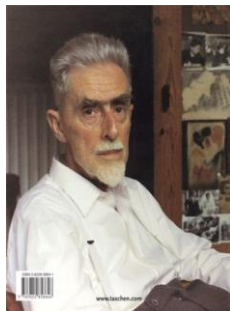


Посмотрите на это изображение: перед вами уже знакомая лента Мебиуса, только выполненная рукой творческого человека. Огромные красные муравьи ползут по ней и никак не могут выбраться. Теперь мы с вами точно знаем, что они никогда не выберутся, так как лента Мебиуса – это полоса с односторонней поверхностью, как не убеждало бы нас наше зрение в обратном.

**Это изображение принадлежит гениальному голландскому художнику и графику Морису Корнелиусу Эшеру (1898-1972гг.)**

**Теперь мы обозначили второе ключевое слово темы нашего урока: Морис Корнелиус Эшер.**

**Слайд 7. Портрет Эшера.**



Так кто же он, загадочный Морис Корнелиус Эшер?

Его жизнь богата парадоксами не меньше, чем его творчество. Он рисовал только левой рукой, а писал правой. Обладая ярко выраженными способностями к рисованию, он не всегда занимался только этим. Переехав в Голландию в возрасте 20-ти лет, он увлекся литературой и даже написал несколько очерков и поэм. До сорока лет он много путешествовал, а потом почти не покидал своего дома в Барне. Его работы часто становились иллюстрациями серьезных трудов по математике, но в самой науке он разбирался не более обычного обывателя. Однако у него были особые отношения с королевой наук: он ее чувствовал, причем как никто другой. На этом парадоксе жизни Эшера нам хотелось бы остановиться подробнее. Но сначала немного математики.

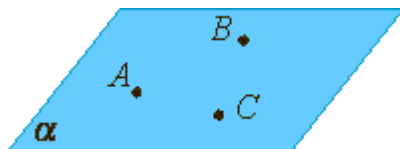
### III. Задачи на выход из плоскости в пространство.

УМ: сейчас вы изучаете раздел математики, который называется Стереометрия. В планиметрии первичными неопределяемыми понятиями являются *точка и прямая*, а в стереометрии – *точка, прямая и плоскость*. Чтобы изучать свойства геометрических фигур в пространстве, необходимо вспомнить основные аксиомы стереометрии.

- Что такое аксиома? (утверждение, не требующее доказательства)

Итак, первая: **Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и только одна.**

1. Ярким примером к этой аксиоме могут служить табуретки: треножная и четырехножная – **Какая из них устойчивее, почему?**
2. Задача про трёх мух. В комнате летают три мухи. **Когда они окажутся в одной плоскости?**



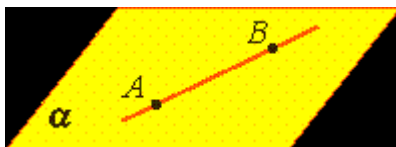
- А что будет, если две точки принадлежат плоскости, а третья - не принадлежит? Можете ли вы проиллюстрировать эту ситуацию на практике, как это может происходить в повседневной жизни, в ваших постоянных действиях? **Фантазируйте... Представляем себе, что мы все плоскатики ...**

#### Слайд 8

GeoGebra (учитель иллюстрирует в программе выход точки из плоскости в пространство)

Аксиома 2.

**2. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит этой плоскости. Смоделировать эту ситуацию при помощи полоски бумаги.**



УМ: А теперь перейдём от строгого языка математики к образному языку искусства

#### Слайд № 9. На экране появляется гравюра Эшера «Рептилии»



Перед нами гравюра Эшера, известная под названием «Рептилии». По сути, мы видим натюрморт, то есть изображение, составленное из некоторого количества предметов. Но если присмотреться внимательнее, то в центре этой композиции мы замечаем некое

движение, причем движение не совсем обычное. Начинается оно, когда одной рептилии наскучило лежать рядом с неподвижными сотоварищами и она аккуратно спускает переднюю ногу с края листа, вступая в реальную жизнь. Влезает на толстый переплет книжки по зоологии и по угольнику взбирается на сложное геометрическое тело, где выпускает пар и на мгновение останавливается. После этого начинается ее движение вниз и рептилия вновь оказывается частью плоской мозаики. Казалось бы все просто и понятно, но за этой кажущейся простотой скрывается глубинный, можно сказать, философский смысл. Попробуем прочесть и его. Во-первых, движение рептилий образно демонстрирует наше пребывание в этом мире: мы вышли из природы, проделали свой путь и вернулись туда же. Во-вторых, здесь нет ни одного случайного предмета, каждый из них имеет свой особый смысл. Мы видим здесь изображение земного мира, который, как известно, определяется четырьмя стихиями. Давайте вспомним, какие это стихии:

**а в помощь вам фрагмент известного фильма**

### Фрагмент фильма «Пятый элемент»

*... земля, вода, воздух и огонь.*

- Кто может назвать фрагмент какого фильма мы посмотрели?
- Кто является его режиссером?

### Слайд 11 Рептилии

А теперь попробуйте отыскать знаки этих стихий в этой гравюре. **Земля** – цветочный горшок с растениями, **вода** – бутылка и стакан рядом, **воздух** – ящерица фыркает и выпускает пар, что создает движение воздуха, и **огонь** – спички в пепельнице. Согласитесь, в таком виде перед нами уже не просто натюрморт, а Вселенная в миниатюре. Если продолжать рассматривать гравюру, то обращают на себя внимание и две книги, причем раскрыта меньшая из них, а большая остается плотно захлопнутой. Возможно, таким образом Эшер хотел показать, сколько еще непознанного остается в нашем мире. И, наконец, не случайно, как мне представляется, из всех геометрических тел художник выбрал именно додекаэдр, который древние греки считали главной геометрической фигурой мироздания.

**УМ.** А что в этой гравюре напрямую связано с математикой?

- Треугольник
- Додекаэдр (*Додекаэдр, воплощал в себе «все сущее», «Вселенский разум», символизировал все мироздание и считался главной геометрической фигурой мироздания.*)
- Мозаика из геометрических фигур
- Выход из плоскости в пространство

**УИ:** Рассмотренная нами гравюра «Рептилии» убедила нас, что автор использовал в ней целый ряд математических понятий, в том числе и выход из плоскости в пространство. Надо, однако, заметить, что пространство интересовало Эшера и как самостоятельная категория. Но сначала слово королеве наук – математике.

**УМ:** Скажите, сколько вы знаете пространственных измерений?

- Двумерное
- Трехмерное
- Передвижение объемов во времени – четырехмерное пространство

Но есть такие измерения высших порядков, которые человеку представить достаточно сложно, а иногда и невозможно.

**УИ:** Пространство, как одна из форм бытия, всегда интересовало творческих людей. Изучение этого явления привело к пониманию определенной логики, которая существует в восприятии пространства. Под логикой пространства мы понимаем те отношения между физическими объектами, которые обычны для реального мира. Но надо понимать сущность творческой личности: интерес к тому, что правильно и понятно быстро угасает. А что будет, если сознательно нарушить эту логику? Вот здесь и появляются визуальные парадоксы, которые еще называют *оптическими иллюзиями*.

### Слайд 12. Гравюра «Верх и низ»



Перед вами гравюра Эшера «*Верх и низ*». Посмотрите на нее внимательно и постарайтесь определить, что здесь не так с логикой пространства? Идет обмен мнениями.

В этой работе Эшер экспериментирует с таким аспектом логики пространства как перспектива. На работах, где присутствует этот эффект, обязательно есть так называемые точки исчезновения, которые и сообщают глазу человека о бесконечности пространства. В произведениях с правильной логикой таких точек может быть одна или две. Эшер же размещает в своей работе сразу пять таких точек: по краям гравюры и в центре. В результате мы видим изображение сразу и сверху, и снизу, в зависимости от точки нашего восприятия.

### Слайд 13. Гравюра «Другой мир»

А вот еще один пример – гравюра «Другой мир». Вопрос тот же: что здесь не так с логикой пространства? Слушаем возможные варианты.

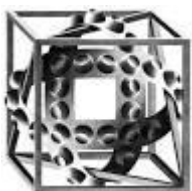


В этой работе художник показал нам один и тот же пейзаж сразу с трех точек зрения: снизу, сверху и на уровне горизонта. Так мир может видеть, наверное, только Господь Бог да изощренный глаз великого художника.

УМ. А теперь попробуем на практике увидеть свои силы в логике пространства

#### Слайд 14. Куб с магической лентой

#### Практическое занятие. Работа в парах



УМ формулирует задания рабочего листа

Даём в парах 1-2 минуты на обдумывание и запись ответов в рабочий лист. Слушаем выступления пар по математике и искусству отдельно.

Учителя оценивают ответы присутствующих словесно.

УИ: Наш урок подходит к концу и заключительное слово мы хотели бы предоставить самому художнику.

#### Слайд 15 . На экране появляется гравюра Эшера «Автопортрет».



УИ: Я очень люблю именно этот автопортрет Эшера. В нем отразилось все: и творческая мастерская художника, и его выразительный взгляд, направленный прямо на зрителя, и, самое главное, его левая рука, - та самая, которая воплотила его гениальные замыслы в жизнь.

#### Заключение

УМ. Вот и подошел к концу наш урок. Мы прошли и через открытия, и через ошибки, прикоснулись и к парадоксам и к гениям. И если этот тернистый путь просвещения не оставил вас равнодушными, то можно сказать, что цель нашего урока достигнута.

УИ: А я бы, со своей стороны, хотела только добавить, что работы Эшера, по моему мнению, это - математика, умноженная на философию, но, в отличие от математики, результат здесь получается у каждого свой.

Урок подготовили учителя:

Оксана Ивановна Лисобой (учитель искусства),

Вероника Вольдемаровна Кришталь (учитель математики)

Слайд-шоу «Картинная галерея» Идет небольшая презентация его работ, где последним будет слайд с «Автопортретом».